Série 6 de Physique 3



Exercice 1

Montrer que la nature elliptique de la trajectoire d'une planète autour du soleil implique que l'attraction qu'elle subit est newtonienne

Indications : On considère le soleil comme fixe, la trajectoire de la planète est elliptique plane, un des foyers est le soleil et la force d'interaction soleil-planète est une force centrale. Nous utiliserons les coordonnées polaires dans le plan de l'ellipse. L'origine étant le foyer

Exercice 2

Nous voulons étudier le mouvement d'une planète P, assimilée à un point matériel dans le champ de gravitation d'une étoile de masse M_E de centre O, considérée comme ponctuelle et fixe. La planète de masse M_P est située à une distance r = OP de O. Nous considérerons un référentiel lié à l'étoile comme un référentiel galiléen.

1. Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction des masses M_P et M_E, r, G la constante universelle de gravitation et le vecteur unitaire $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{r}$
2. Justifier précisément que le mouvement est plan. Préciser ce plan. On notera $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base de projection dans ce plan et $\vec{e}_z$, un vecteur unitaire suivant la direction du moment cinétique par rapport à O. Préciser l'expression de σ_0 en fonction de M_P, r et $\dot{\theta}$.
3. On suppose dans cette question que la planète décrit un **mouvement circulaire** de rayon R et de période T. On notera V_C, le module de la vitesse pour un mouvement circulaire.
   - **3.1.** Etablir l'expression de la vitesse de la planète. vc en fonction de R, G et M_E
   - **3.2.** En déduire une relation entre R, T, G et M_E (quel nom porte cette loi).
   - **3.3.** En déduire l'énergie cinétique et l'énergie mécanique en fonction de G, R, M_P et M_E.
4. On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse est $r = \dfrac{p}{1 + e \cos\theta}$. On se propose d'étudier le mouvement de la planète à l'aide du vecteur excentricité $\vec{e}$ (sens du mouvement): $\vec{e} = \dfrac{\sigma_0}{G M_E M_P}\vec{V} - \vec{e}_\theta$ où $\vec{V}$ est la vitesse de la planète. Le mouvement de P est dans le sens de θ croissant.
   - **4.1.** Montrer que le vecteur excentricité $\vec{e}$ est constant. Donner sa direction. Faire un schéma pour placer $\vec{e}$
   - **4.2.** En faisant le produit scalaire $\vec{e}\,.\,\vec{e}_\theta$, montrer que $r = \dfrac{p}{1 + e \cos\theta}$ et en déduire que le module de $\vec{e}$ est e. Préciser p en fonction de G, M_E, M_P et σ_0.
   - **4.3.** Préciser la valeur de l'excentricité pour un mouvement circulaire.
   - **4.4.** Dans le cas d'un mouvement circulaire, préciser la valeur de σ_0 en fonction de R, Vc, et M_P. Retrouver à l'aide du vecteur excentricité, l'expression de la vitesse Vc de la planète, en fonction de R, G, M_E.

Exercice 3

I- On considère l'oscillateur constitué d'un ressort de raideur K, d'axe horizontal, dont l'une des extrémités est fixe et l'autre reliée à une masse m en mouvement sans frottement dans la direction horizontale fixe OX_0

a- Sachant que sous l'action d'une force d'intensité f = 160 N, le ressort s'allonge de a = 10 cm, déterminer l'expression et la valeur numérique de sa raideur k.

b- A l'instant t = 0, la masse m est abandonnée sans vitesse initiale à partir de la position A. Ecrire l'équation différentielle du mouvement et la résoudre pour trouver la loi du mouvement. On prendra m = 1 Kg. Préciser les valeurs numériques de la pulsation propre w_0 et de l'amplitude X_m du mouvement.

c- Déterminer les expressions et calculer les valeurs numériques de l'énergie potentielle maximale V_m, de l'énergie cinétique maximale du système et de l'énergie mécanique de ce système.

II- On considère le système mécanique constitué de la masse m, du ressort de raideur K précédemment calculée et d'un amortisseur de type visqueux de coefficient d'amortissement k' s'exerçant sur la masse m, la force de frottement $\vec{F}_v = -k'\vec{V}(M/R_0)$

a- Ecrire l'équation différentielle du mouvement en posant : $w_0^2 = k/m$ et $\lambda = k'/2m$
Sachant qu'à l'instant initial t = 0, x = a, $V_0 = 0$, déterminer la loi du mouvement oscillatoire amorti après avoir précisé l'inégalité vérifiée par $\lambda^2 - w_0^2$

b- Sachant que le rapport des amplitudes de la première oscillation à la sixième oscillation est de 10, déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique δ. En déduire les valeurs de λ, de k' et de la constante de temps τ du système

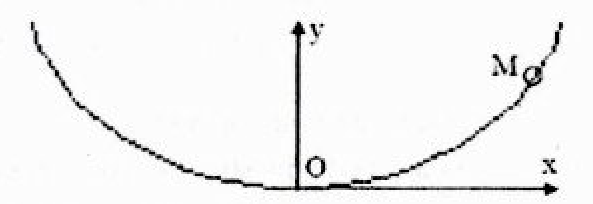
III- Le système mécanique de la question 2 est maintenant supposé soumis à l'action de la force excitatrice

$$\vec{F}_e = 20\cos(2w_0 t)\ \vec{x}_0$$

a- Ecrire l'équation différentielle du mouvement
b- Déterminer la loi du mouvement du régime permanent.
c- Préciser les expressions et donner les valeurs numériques de l'amplitude X_m et de la phase φ de l'élongation x (t)

Exercice 4

Un mobile pesant M assimilable à un point matériel de masse m coulisse sans frottement sur l'arc de cycloïde dessiné ci-contre. On repère sa position par ses coordonnées cartésiennes x et y sur deux axes Ox horizontal et Oy vertical dirigé vers le haut. L'équation paramétrique de la cycloïde est :



$x = b(\theta - \sin\theta)$; $y = b(1 - \cos\theta)$, où b est une constante et θ une variable dont la variation entre $-\pi$ et π engendre l'arc. On note g la pesanteur.

1) Exprimer les coordonnées (dx, dy) d'un déplacement élémentaire du mobile en fonction de b, θ et $d\theta$.
2) En déduire la longueur ds de ce déplacement.
3) En déduire que l'abscisse curviligne $s = \overline{OM}$ comptée positivement vers la droite, est : $s = 4b\sin\frac{\theta}{2}$.
4) Montrer que l'énergie potentielle associée à la force totale subie par le mobile est $E_p = \frac{mgs^2}{8b}$.
5) Exprimer l'énergie totale du mobile est en fonction de s et $\dot{s}$.
6) Dériver par rapport au temps cette expression et en déduire une équation différentielle du mouvement portant sur la fonction $s(t)$.
7) Déduire la nature du mouvement
8) A l'instant 0, le mobile est à la position correspondant à $\theta = \theta_M$ avec une vitesse nulle. A quel instant t passe-t-il pour la première fois en O ? Avec quelle vitesse v ?

Exercice 5

On considère le système S formé de deux points matériels A et B de même masse m/2 reliés par une barre de masse supposée négligeable et de longueur (2 l). Ce système glisse sans frottement sur le point E d'une manche d'escalier OHE. Le point A est sur l'axe OX et est poussé vers H avec une vitesse constante V_A. Dans tout l'exercice, on suppose que le centre de masse G du système est situé à gauche de E et que le mouvement est observée dans le référentiel terrestre R (O, X, Y, Z) supposé galiléen (O point fixe, OH = a, HE = h, OX axe horizontal, OY axe vertical).
On repère S par l'angle θ (voir figure).

a- Etablir les expressions de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ et de V_A.
b- Exprimer, dans la base cartésienne associé à R, en fonction de m, h, l, V_A et θ, la quantité du mouvement, le moment cinétique au point G et l'énergie cinétique de S dans R


ETUSUP.com